

MATEMATIKAI BEVEZETŐ I.

Belucz Bernadett

Csillagászati Tanszék, Eötvös Lóránd Tudományegyetem
Magyar Napfizikai Alapítvány, Gyula



SZÁMOK - TERMÉSZETES SZÁMOK

- ▶ az egyesével való számolás során keletkező $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ számok a **természetes számok**
- ▶ halmazán mindig elvégezhető az összeadás és a szorzás művelete
- ▶ a kivonás és az osztás nem mindig végezhető el, mert nem minden esetben ad az eredmény halmazbeli elemet
- ▶ végtelen elemű halmaz

SZÁMOK - TERMÉSZETES SZÁMOK

$$\forall a, b \in \mathbf{N} \quad \exists c \in \mathbf{N} : a + b = c$$

Összeadásra **ZÁRT**.

$$\forall a, b, c \in \mathbf{N} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Összeadásra **ASSZOCIATÍV**.

Félcsoport az a halmaz, amely zárt és asszociatív egy műveletre. A természetes számok halmaza tehát félcsoport az összeadás műveletére.

SZÁMOK - TERMÉSZETES SZÁMOK

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{N} : a \cdot b = c$$

Szorzásra **ZÁRT**.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} \quad (ab)c = a(bc)$$

Szorzásra **ASSZOCIATÍV**.

Semleges elem az 1.

Egységelemes félcsoport az a halmaz, amely zárt és asszociatív egy műveletre, és semleges elemet is tartalmaz.

A természetes számok halmaza tehát egységelemes félcsoport a szorzás műveletére.

SZÁMOK - TERMÉSZETES SZÁMOK

$$\forall \quad a, b \in \mathbf{N} \quad \exists \quad a + b = b + a$$

KOMMUTATÍV.

$$\forall \quad a, b, c \in \mathbf{N} \quad (a + b)c = (ac) + (bc)$$

DISZTRIBUTÍV.

SZÁMOK - EGÉSZ SZÁMOK

- ▶ $\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
- ▶ az összeadás, a szorzás és a kivonás is mindig elvégezhető
- ▶ az összeadásnál a 0, a szorzásnál az 1 a kitüntetett helyzetű
- ▶ végtelen halmaz

SZÁMOK - EGÉSZ SZÁMOK

$$\forall a, b \in \mathbf{Z} \quad \exists c \in \mathbf{Z} : a + b = c$$

Összeadásra **ZÁRT**.

$$\forall a, b, c \in \mathbf{N} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

Összeadásra **ASSZOCIATÍV**.

$$\exists 0 \in \mathbf{Z} \quad \forall a \in \mathbf{Z} \quad a + 0 = a$$

SEMLEGES ELEM

$$\forall a \in \mathbf{Z} \quad \exists a' \in \mathbf{Z} \quad a + a' = 0$$

INVERZ

Ha egy halmaz valamilyen műveletre $(\mathbf{Z}, +)$ zárt, asszociatív, létezik inverz és semleges elem, akkor azt csoportnak hívjuk. Ha a csoport disztributív tulajdonsággal is rendelkezik, akkor gyűrűnek hívjuk.

SZÁMOK - RACIONÁLIS SZÁMOK

- ▶ előállíthatóak két egész szám hányadosaként
- ▶ minden racionális szám felírható véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört (periodikus tört) alakjában.
- ▶ tartalmazza az egész számok halmazát
- ▶ az összeadás, a szorzás, a kivonás és az osztás is mindig elvégezhető, kivéve a nullával való osztást
- ▶ **Mivel az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív ($(\mathbb{Q}, \cdot)$, ha $\mathbb{Q} \setminus 0$ és $(\mathbb{Q}, +)$ csoportok), továbbá a szorzás disztributív, ezért a racionális számok halmaza TEST.**

SZÁMOK - IRRACIONÁLIS SZÁMOK

- ▶ végtelen, nem szakaszos tizedes törtek
- ▶ ilyen a $\sqrt{2}$ vagy a π

SZÁMOK - VALÓS SZÁMOK

- ▶ a racionális és az irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát ($\mathbf{R}$) ($R = Q \cup I$)
- ▶ a valós számok és a számegyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű leképezés létesíthető
- ▶ $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ test

SZÁMOK - KOMPLEX SZÁMOK

- ▶ hozzácsatolunk a valós számok halmazához egy i -vel jelölt új elemet, amellyel ugyan úgy kívánunk műveleteket végezni, mint a valós számokkal, és kikötjük, hogy

$$i^2 = -1$$

$$i = \sqrt{-1}$$

- ▶ a számfogalom általánosítása a komplex számokra vezet, amelyek az algebrában és az analízisben igen fontos szerepet játszanak

SZÁMOK - KOMPLEX SZÁMOK

A komplex számok: A komplex szám általános alakja $z = \alpha + \beta i$, ha itt α és β minden valós értéket felvesznek, az α -t a komplex szám valós részének, a βi -t a képzetes részének nevezzük. $\alpha = \operatorname{Re} z$ $\beta = \operatorname{Im} z$

- ▶ a szorzás, összeadás, kivonás és osztás műveletét ugyanolyan szabályok szerint végezzük el, mint a valós számok körében, még hozzá úgy, hogy a $a + bi$ és a $c + di$ komplex számok összegére, illetve szorzatára a következő teljesülnek:

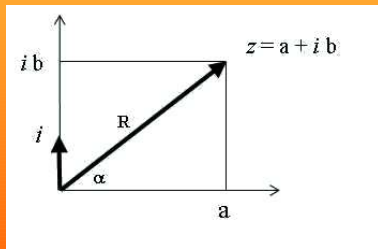
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

A komplex szám akkor, és csakis akkor egyenlő nullával, ha a valós és a képzetes része is nulla. Két komplex szám akkor, és csakis akkor egyenlő, ha a valós és a képzetes részük is egyenlő.

KOMPLEX SZÁMSÍK

- ▶ a komplex számokról és a műveleteikről szemléletes képet kapunk úgy, hogy a komplex számokat a síkban ábrázoljuk
- ▶ egy derékszögű koordináta-rendszerben az $a + bi$ komplex számhoz rendeljük hozzá azt a pontot, amelynek koordinátái (a, b)



KOMPLEX SZÁMSÍK

- ▶ ily módon az $a + 0i$ alakú számhoz, azaz a valós számokhoz a $(a,0)$ típusú pontok, tehát az x tengely pontjai tartoznak, az x **tengely tehát a valós tengely**
- ▶ a $0 + bi$ típusú képzetes számokhoz a $(0,b)$ koordinátájú pontok, tehát az y tengely pontjai rendelhetők hozzá, az y **tengely tehát a képzetes tengely**
- ▶ ily módon a sík pontjai és a valós számok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés jön létre, minden ponthoz tartozik egy, és csakis egy komplex szám, és minden komplex számhoz egy, és csakis egy pont

A komplex számokkal így megjelölt síkot komplex számsíknak nevezzük.

KOMPLEX SZÁMSÍK

- ▶ a valós tengely pozitív felét a 0 körül elforgatva fedni fogja a z vektort, ez a **forgásszöget** a z **argumentumának (irányszögének)** nevezzük.
- ▶ az $\arg z = \phi$ vagy $+$ vagy $-$, attól függően, hogy a valós tengelyt milyen irányú elforgatás viszi a z vektorba
- ▶ a z vektor nem határozza meg egyértelműen az irányszöget, mert a $\phi, \phi + 2\pi, \phi + 4\pi, \dots = \phi \pm k2\pi$ irányszögekhez (és csakis ezekhez) ugyanaz az irány tartozik, viszont az irányszög a vektor irányát egyértelműen meghatározza
- ▶ a 0-hoz tetszőleges irányszög tartozhat

KOMPLEX SZÁMSÍK

A z pontnak a 0 ponttól mért távolsága a z komplex szám abszolút értéke, jele: $|z|$. Pitagorasz-tétele szerint $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ez akkor is igaz, ha a z valós vagy képzetes szám. Komplex szám abszolút értéke tehát nemnegatív valós szám.

A szorzat abszolút értéke egyenlő a tényezők abszolút értékének szorzatával. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. A hányados abszolút értéke a számláló és a nevező abszolút értékének hányadosa.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

KOMPLEX SZÁMSÍK

Az $a + bi$ és a $a - bi$ komplex számok egymás konjugáltjai, a komplex számsíkon a konjugált és a komplex számokhoz tartozó pontok a valós tengelyre tükrösen helyezkednek el. A valós számok egyenlők a konjugáltjukkal. A konjugált számok abszolútértéke egyenlő $|z| = |z^*|$, az irányszögek viszont egymás ellentettjei $\arg z = -\arg z^*$. Két konjugált komplex szám szorzata abszolútértékük négyzetével egyenlő. $z \cdot z^* = |z|^2$

KOMPLEX SZÁMSÍK

Levezethetők a következő állítások:

- ▶ az összeg konjugáltja egyenlő az összeadandók konjugáltjának összegével
- ▶ a szorzat konjugáltja egyenlő a tényezők konjugáltjának szorzatával
- ▶ a hányados konjugáltja egyenlő a számláló és a nevező konjugáltjának hányadosával
- ▶ két komplex szám szorzatának irányszöge a tényezők irányszögeinek az összegével egyenlő, azaz
$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

KOMPLEX SZÁMOK TRIGONOMETRIKUS ALAKJA

A $z = \alpha + \beta i$ kifejezést a komplex számok algebrai alakjának nevezzük. Ha a komplex számot ábrázoló pont derékszögű koordinátáiról áttérünk a polárkoordinátákra, akkor a trigonometrikus alakját kapjuk:

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$$

$$r = |z|$$

$$\phi = \arg z$$

KOMPLEX SZÁMOK TRIGONOMETRIKUS ALAKJA

- ▶ az α , β és r , ϕ között ugyanaz az összefüggés áll fenn, mint bármely pont derékszögű és polárkoordinátái között:

$$\alpha = r \cos \phi$$

$$\beta = r \sin \phi$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

KOMPLEX SZÁMOK EXPONENCIÁLIS ALAKJA

Az 1 abszolút értékű és ϕ irányszögű komplex számot $e^{i\phi}$ -vel jelöljük, ahol az e a természetes logaritmus alapszáma, tehát

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}$$

- ▶ ennek megfelelően az r abszolút értékű és ϕ irányszögű komplex szám exponenciális alakja: $r(\cos \phi + i \sin \phi) = re^{i\phi}$
- ▶ A szorzás művelete:

$$z_1 = r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) = r_1 e^{i\phi_1}$$

$$z_2 = r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) = r_2 e^{i\phi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$$

KOMPLEX SZÁMOK EXPONENCIÁLIS ALAKJA

- ▶ Az osztás művelete:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

- ▶ A hatványozás művelete:

$$[r(\cos \phi + i \sin \phi)]^n = r^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)] = (re^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi}$$

- ▶ A gyökvonás

$$\sqrt[n]{(re^{i\phi})} = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\phi}{n}}$$

- ▶ Érdeemes még tudni:

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \quad e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$$

$$e^{i2\pi} = 1 \quad e^{i\pi} = -1$$

$$\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} = \cos \phi \quad \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \sin \phi$$

1. PÉLDA

Végezzük el az alábbi műveleteket!

A.

$$(2 + 3i)(3 - 2i)$$

B.

$$\frac{1 + i}{1 - i}$$

1. PÉLDA

A.

$$(2 + 3i)(3 - 2i) = 5 + 9i - 4i - 6i^2$$

1. PÉLDA

A.

$$(2 + 3i)(3 - 2i) = 5 + 9i - 4i - 6i^2 = 5 + 9i - 4i - 6(-1)$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

B.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

B.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2-i^2}$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

B.

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1^2-i^2)} = \frac{(1+i)^2}{2}$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

B.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1^2-i^2)} = \frac{(1+i)^2}{2} \\ &= \frac{1^2+i^2+2i}{2}\end{aligned}$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

B.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2-i^2} = \frac{(1+i)^2}{2} \\ &= \frac{1^2+i^2+2i}{2} = \frac{2i}{2}\end{aligned}$$

1. PÉLDA

A.

$$(2+3i)(3-2i) = 5+9i-4i-6i^2 = 5+9i-4i-6(-1) = 12+5i$$

B.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)(1+i)}{1^2-i^2} = \frac{(1+i)^2}{2} \\ &= \frac{1^2+i^2+2i}{2} = \frac{2i}{2} = i\end{aligned}$$

2. PÉLDA

Számítsuk ki a $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i$ és $z_2 = 1 + i$ komplex számok szorzatát!

- A. algebrai
- B. trigonometrikus
- C. exponenciális alakban.

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3} + 2i)(1 + i)$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3} + 2i)(1 + i) = 2\sqrt{3} + 2i + 2\sqrt{3}i + 2i^2$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3}+2i)(1+i) = 2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i+2i^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)i$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3}+2i)(1+i) = 2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i+2i^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)i$$

B.

$$r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2i)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{2}{2\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3}+2i)(1+i) = 2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i+2i^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)i$$

B.

$$r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2i)^2} = \sqrt{12 + 4} = 4$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{2}{2\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$r_2 = \sqrt{1^2 + (1i)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3}+2i)(1+i) = 2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i+2i^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)i$$

B.

$$r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2i)^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{2}{2\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$r_2 = \sqrt{1^2 + (1i)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 z_2 = 4\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}))$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3}+2i)(1+i) = 2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i+2i^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)i$$

B.

$$r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2i)^2} = \sqrt{12+4} = 4$$

$$\phi_1 = \arctan \frac{2}{2\sqrt{3}} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$r_2 = \sqrt{1^2 + (1i)^2} = \sqrt{2}$$

$$\phi_2 = \arctan \frac{1}{1} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 z_2 = 4\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4})) = 4\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i \sin(\frac{5\pi}{12}))$$

2. PÉLDA

A.

$$(2\sqrt{3}+2i)(1+i) = 2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i+2i^2 = (2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)i$$

B.

$$r_1 = 4 \quad \phi_1 = \frac{\pi}{6} \quad r_2 = \sqrt{2} \quad \phi_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$z_1 z_2 = 4\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

C.

$$z_1 z_2 = 4\sqrt{2} e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$$

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

- ▶ Legyen adott két nem üres halmaz: A és B . Ha a halmaz elemeihez – valamilyen utasítás szerint – egyértelműen hozzárendeljük a B halmaz bizonyos elemeit, akkor egy függvényt adtunk meg.
- ▶ Az A halmaz a függvény **értelmezési tartománya**, a B halmaz azon részhalmaza, mely a hozzárendelés során ténylegesen felhasználódik: a függvény **értékkészlete**.
- ▶ Gyakran előfordul, hogy az értékkészlet elemeihez, mint értelmezési tartományban egy újabb egyértelmű hozzárendelést hajtunk végre. Ilyenkor összetett, függvényről beszélünk.
- ▶ A függvényeket a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben ábrázolhatjuk

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

- ▶ Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő az $[a,b]$ intervallumban, ha $\forall x_1 < x_2$ esetében $f(x_1) < f(x_2)$.
- ▶ Az $f(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő az $[a,b]$ intervallumban, ha $\forall x_1 < x_2$ esetében $f(x_1) > f(x_2)$.
- ▶ Az $f(x)$ függvény felülről korláatosnak mondható, ha $\exists K$ szám, hogy az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) \leq K$
- ▶ Az $f(x)$ függvény alulról korláatosnak mondható, ha $\exists k$ szám, hogy az értelmezési tartomány minden x elemére $f(x) \geq k$
- ▶ Ha az $f(x)$ függvény felülről és alulról is korláatos, akkor korláatos függvénynek mondjuk.

FÜGGVÉNYEK TULAJDONSÁGAI

- ▶ Az $f(x)$ függvény páros, ha az alábbi két követelmény teljesül: ha $x \in ET$, akkor $-x \in ET$, továbbá $\forall x \in ET$ $f(x) = f(-x)$.
- ▶ Ebből következik, hogy a páros függvények grafikus képe az y-tengelyre tengelyesen szimmetrikus.
- ▶ Az $f(x)$ függvény páratlan, ha az alábbi két követelmény teljesül: ha $x \in ET$, akkor $-x \in ET$, továbbá $\forall x \in ET$ $f(x) = -f(-x)$.
- ▶ Ebből következik, hogy a páratlan függvények grafikus képe az origóra középpontosan szimmetrikus.
- ▶ Az $f(x)$ függvény periodikus, és a periodusa a $p > 0$, $p \in R$, ha $\forall x \in ET$ $f(x) = f(x + kp)$ $k \in Z$.

FÜGGVÉNY HATÁRÉRTÉKE

- ▶ Legyen az $y = f(x)$ függvény értelmezve a a hely egy környezetében, magát az a helyet esetleg kivéve.
- ▶ **A függvény határértéke vagy limesze az $x = a$ helyen A , jelben**
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ vagy $f(x) \rightarrow A$ ha $x \rightarrow a$
ha miközben x minden határon túl közeledik az a -hoz, az $f(x)$ függvény minden határon túl közeleik az A -hoz.
- ▶ Nem szükséges, hogy az $f(x)$ függvény az $x = a$ helyen az A értéket vegye fel, de még az sem, hogy értelmezve legyen.
- ▶ **Az $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ határérték akkor létezik, ha megadva egy tetszőlegesen kicsi pozitív ϵ számot, található egy másik pozitív η szám úgy, hogy $|x - a| < \eta$ esetében $|f(x) - A| < \epsilon$, kivéve esetleg az a értéket.**

JOB B É S BAL OLDALI HATÁRÉRTÉK

- ▶ Az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen a bal oldali határértéke A^- , ha az a számhoz minden határon túl alulról közeledő x értékek esetén a függvényérték minden határon túl közeledik az A^- értékhez:
$$A^- = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$
- ▶ Az $f(x)$ függvénynek az $x = a$ helyen a jobb oldali határértéke A^+ , ha az a számhoz minden határon túl felülről közeledő x értékek esetén a függvényérték minden határon túl közeledik az A^+ értékhez:
$$A^+ = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKEIRE VONATKOZÓ TÉTELEK

1. Állandó függvény határértéke: Állandó függvény határértéke egyenlő magával ezzel a mennyiséggel:

$$\lim_{x \rightarrow a} A = A$$

2. Összeg vagy különbség határértéke: Véges sok függvény bármilyen előjellel vett összegének a határértéke egyenlő a függvények határértékének megfelelő előjelű összegével, feltéve, hogy a határértékek külön-külön léteznek és végesek:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \phi(x) - \psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) - \lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$$

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKEIRE VONATKOZÓ TÉTELEK

3. Szorzat határértéke: Véges sok függvény szorzatának a határértéke egyenlő a függvények határértékének szorzatával, feltéve, hogy a határértékek külön-külön léteznek és végesek:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)\phi(x)\psi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \lim_{x \rightarrow a} \psi(x)$$

4. Hányados határértéke: Két függvény hányadosának határértéke egyenlő a függvények határértékének hányadosával:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \phi(x)}$$

feltéve, hogy a határértékek külön-külön léteznek, végesek és $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \neq 0$

FÜGGVÉNYEK HATÁRÉRTÉKEIRE VONATKOZÓ TÉTELEK

5. Közrefogás (rendőrelv): Ha az $f(x)$ függvény értékeit az a pont valamely környezetében két másik függvény, $\phi(x)$ és $\psi(x)$ értékei közrefogják, azaz $\forall x$ -re vagy $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, vagy $\psi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)$, ha továbbá $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = A$ és $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = A$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ($A \pm \infty$ is lehet)
- A fenti tételekben az $a \pm \infty$ is lehet.

HATÁRÉRTÉKEK KISZÁMÍTÁSA - 3. PÉLDA

1. Alkalmas átalakítással

A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}-1)} = \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}-1)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}-1} = \frac{1}{2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} =$
 $2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2$

HATÁRÉRTÉKEK KISZÁMÍTÁSA

2. Ha $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ alakú határozatlan kifejezések lépnek fel, akkor a Bernoulli-l'Hospital-szabályt alkalmazzuk

A. $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ alakú határozatlan kifejezések

- ▶ Ha az $f(x) = \frac{\phi(x)}{\psi(x)}$ függvényre $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$
a $\phi(x)$, $\psi(x)$ függvények egy, az a pontot tartalmazó intervallumban értelmezve vannak (magában az a pontban nem kell, hogy értelmezve legyenek) és differenciálhatók,
továbbá $\psi'(x) \neq 0$, akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi'(x)}{\psi'(x)}$, feltéve,
hogy ez utóbbi határérték létezik.
- ▶ Az eljárást akárhányszor megismételhetjük.

HATÁRÉRTÉKEK KISZÁMÍTÁSA

B. $0 \cdot \infty$ alakú határozatlan kifejezések

- ▶ Ha az előbbi esethez hasonló differenciálhatósági feltételek mellett fennáll $f(x) = \phi(x)\psi(x)$, valamint $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$, akkor a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ határértéket a $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}$ vagy $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\psi(x)}{\frac{1}{\phi(x)}}$ alakra hozzuk, és ezzel a határérték kiszámítását visszavezettük az előző esetre.

HATÁRÉRTÉKEK KISZÁMÍTÁSA

C. $\infty - \infty$ alakú határozatlan kifejezések

- ▶ Ha az előbbi esethez hasonló differenciálhatósági feltételek mellett fennáll $f(x) = \phi(x) - \psi(x)$, valamint $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \infty$, akkor a $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ határértéket kiszámítására a $\frac{0}{0}$, vagy reciprokra átvérve $\frac{\infty}{\infty}$ alakra hozzuk. Ez különféle módokon történhet, például $\frac{0}{0}$ -t kapunk így $\phi - \psi = \left(\frac{1}{\psi} - \frac{1}{\phi} \right) / \frac{1}{\psi\phi}$

HATÁRÉRTÉKEK KISZÁMÍTÁSA

- D. 0^0 , ∞^0 , 1^∞ alakú határozatlan kifejezések
- ▶ Ha a környezetében $\phi(x) > 0$, $f(x) = \phi(x)^{\psi(x)}$, valamint $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = 0$, akkor először az $\ln f(x) = \psi(x) \ln \phi(x)$ kifejezés A határértékét számoljuk ki, amely $0 \cdot \infty$ alakú
 - ▶ ha ez létezik, akkor utána pedig végeredményként az e^A értéket
 - ▶ ha $\phi(x) \geq 0$, de bármilyen kis környezetében van x , hogy $\phi(x) = 0$, akkor ezen x -ekre $\psi(x) \geq 0$ lehet csak, és ekkor a határérték csak $0^0 = 1$ vagy $0^{\psi(x)} = 0$ lehet aszerint, hogy mindezekre x -ekre $\phi(x) = 0$, vagy pedig a -hoz elég közel már $\psi(x) > 0$; mindkét esetben csak a többi x -re kell és lehet a fenti eljárással eldönteni, hogy ezekre is 1, illetve 0-e a határérték

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6}$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+z}-2}{\sqrt{x}-1}$

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

$$\text{A. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x^3}}$$

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

$$\text{A. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x^3}} = \frac{3}{5}$$

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

$$\text{A. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x^3}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{B. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

$$A. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x^3}} = \frac{3}{5}$$

$$B. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}$$

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

$$A. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x^3}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} B. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+z}-2}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+z}-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+z}-2)(\sqrt{3+z}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+z}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+z}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} &= \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{3+z}+2)} \end{aligned}$$

4. PÉLDA

Határozzuk meg az alábbi függvények függvényhatárértékeit!

$$A. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{5x^3 + 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{5 + \frac{6}{x^3}} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} B. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+z}-2}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+z}-2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{3+z}-2)(\sqrt{3+z}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+z}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} &= \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3+z}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} &= \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{3+z}+2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

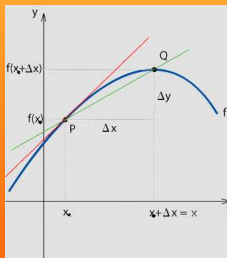
DERIVÁLT

- ▶ Az $f(x)$ függvényt az x_0 helyen folytonosnak mondjuk, ha ott értelmezve van, és határértéke megegyezik a helyettesítési értékével. Ha az $f(x)$ függvény az $\mathbb{R}$ minden pontjában folytonos, akkor $f(x)$ függvényt folytonos függvénynek nevezzük.
- ▶ Nagyon sok esetben szükségünk lehet valamely folytonos függvény egy adott P pontjában az érintőjére, illetve fontos információt árul el az adott helyen az érintő meredeksége.
- ▶ Ezt a következő képpen kapjuk meg.

DERIVÁLT

- ▶ A P pont koordinátái: $P(x_0, f(x_0))$
- ▶ Vegyünk fel egy tetszőleges x helyet, illetve az ehhez a helyhez tartozó Q pontot: $Q(x, f(x))$
- ▶ Írjuk fel a P és Q pontokon átmenő szelő meredekségét

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



DERIVÁLT

- ▶ Ha most képezzük e kifejezés határértékét $x \rightarrow x_0$ esetén, akkor éppen a P pontbeli érintő meredekségét kapjuk meg. Ezt a határértéket nevezzük az $f(x)$ függvény x_0 helyhez tartozó deriváltjának.
- ▶ Ha létezik az alábbi határérték, akkor ezt a határértéket nevezzük az $f(x)$ függvény differenciálhányadosának, azaz deriváltjának.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x)$$

- ▶ Ha az $f(x)$ függvény az értelmezési tartomány minden pontjában differenciálható, akkor az $f'(x)$ függvényt nevezzük $f(x)$ derivált-függvényének.

DERIVÁLÁSI SZABÁLYOK

- ▶ Konstans függvény deriváltja:

$$c' = 0$$

- ▶ Konstanssal szorzott függvény deriváltja:

$$[cf(x)]' = cf'(x)$$

- ▶ Két függvény összegének deriváltja

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

- ▶ Két függvény szorzatának deriváltja:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

DERIVÁLÁSI SZABÁLYOK

- ▶ Két függvény hányadosának deriváltja:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$$

- ▶ Összetett függvény deriváltja:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- ▶ Hatvány függvény deriváltja:

$$[f^a(x)]' = af^{a-1}(x)f'(x)$$

- ▶ Magasabb rendű deriváltak:

$$[f(x)]'' = [f'(x)]' \quad [f(x)]''' = [f''(x)]' \quad f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$$

ELEMI FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

$f(x)$	$\mathcal{D}f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}f'$
$c \quad (c \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$x^k \quad (k \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	kx^{k-1}	$\mathbb{R}$
$x^{-k} \quad (k \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$(-k)x^{-k-1}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^k \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R} + 0$	kx^{k-1}	$\mathbb{R} +$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$
$\operatorname{ctg}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$
$\sec(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$\frac{\operatorname{tg}(x)}{\cos(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$
$\operatorname{cosec}(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$-\frac{\operatorname{ctg}(x)}{\sin(x)}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$
$e^{kx} \quad (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	ke^{kx}	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R} +$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} +$
$a^x \quad (a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a) \cdot a^x$	$\mathbb{R}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctg(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

- ▶ A többváltozós valós f függvény változói közül egy kivételével az összes többit tekintsük állandónak.
- ▶ Az így keletkező egyváltozós függvény deriválható, ha a kiválasztott változóval a deriválhatóságra vonatkozó feltételek teljesülnek.
- ▶ A többváltozós függvény valamely változója szerinti deriváltját parciális deriválnak nevezzük.

PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

- Az $f(x, y)$ kétváltozós valós függvény (x_0, y_0) helyhez tartozó x szerinti parciális differenciálhányadosán a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

határértéket, y szerinti parciális differenciálhányadosán pedig a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

határértéket értjük, feltéve, hogy ezek léteznek (és végesek).

PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

- ▶ A kétváltozós f függvény x szerinti, illetve y szerinti parciális deriváltján azt a kétváltozós függvényt értjük, amelynek értelmezési tartománya mindazokból a pontokból áll, ahol létezik f -nek x szerinti, illetve y szerinti parciális differenciálhányadosa és értéke itt egyenlő a parciális differenciálhányados e pontbeli értékével.

PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

- ▶ Az f függvény x , illetve y szerinti parciális deriváltjának jelölésére az $\frac{\partial f}{\partial x}$, illetve $\frac{\partial f}{\partial y}$ szimbólumot használjuk.
- ▶ A deriváltak helyettesítési értékét az egyváltozós függvényekhez hasonlóan:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

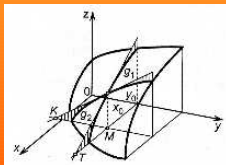
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0}$$

$$f'_x(x_0, y_0)$$

módon jelöljük.

PARCIÁLIS DERIVÁLÁS

- ▶ a kétváltozós függvény parciális deriváltjának geometriai jelentése az ábrán
- ▶ metszük el a $z = f(x, y)$ felületet $y = y_0$ síkkal. Ekkor a $f'_x(x_0, y_0)$ parciális differenciálhányados a $z = f(x, y_0)$ metszetgörbe x_0 helyhez tartozó érintőjének iránytangensével egyenlő, azaz $f'_x(x_0, y_0) = \tan \alpha$.
- ▶ Hasonlóképpen látható be, hogy $f'_y(x_0, y_0)$ a $z = f(x_0, y)$ metszetgörbe y_0 helyhez tartozó érintőjének iránytangensével egyenlő, azaz $f'_y(x_0, y_0) = \tan \beta$.



TELJES DIFFERENCIÁL

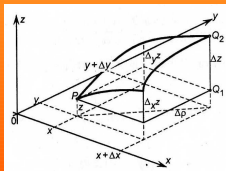
- ▶ A $z = f(x, y)$ egyenlettel adott felület $P(x, y, f(x, y))$ pontjára illeszkedő és az x, z -síkkal párhuzamos, illetve az y, z -síkkal párhuzamos síkok által kimetszett görbék mentén az f függvény $\Delta_x z$, ill. $\Delta_y z$ megváltozása:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad \Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

- ▶ A függvény teljes megváltozása pedig a

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

képlettel adható meg ($\Delta z = Q_1 Q_2$)



TELJES DIFFERENCIÁL

- ▶ Tfh, hogy az f függvénynek egy (x, y) pont környezetében folytonos parciális deriváltjai vannak. Ekkor a függvény teljes megváltozása kifejezhető a partiális deriváltakkal:

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

ahol $\epsilon_1 \rightarrow 0$ és $\epsilon_2 \rightarrow 0$, ha $\delta x \rightarrow 0$ és $\delta y \rightarrow 0$

- ▶ Az f függvény teljes differenciáljának nevezzük:

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

TELJES DIFFERENCIÁL

- ▶ A z függvény (x_0, y_0) pontbeli teljes differenciálját, a $\Delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$ jelölés bevezetésével

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0} (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0} (y - y_0)$$

alakra hozva a függvény teljes megváltozásának közelítő becslésére használhatjuk az (x_0, y_0) pont környezetében, ha $x - x_0$, $y - y_0$ valamint a partiális deriváltak elegendő kicsik

- ▶ Felhasználva azt, hogy az $x : (x_0, y_0) \rightarrow x_0$ és $y : (x_0, y_0) \rightarrow y_0$ függvények teljes differenciáljai:

$$dx = x - x_0 \quad dy = y - y_0$$

így a fenti formula alakja:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]'$

B. $\left[\frac{\sin^2(x) + x^4}{2x} \right]'$

C. $[x^2 e^x]'$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]' = 4 \cos x + 3 \sin x$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]' = 4 \cos x + 3 \sin x$

B. $\left[\frac{\sin^2(x) + x^4}{2x} \right]' = \frac{(\sin^2(x) + x^4)' 2x - (\sin^2(x) + x^4)(2x)'}{(2x)^2}$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]' = 4 \cos x + 3 \sin x$

B.
$$\left[\frac{\sin^2(x) + x^4}{2x} \right]' = \frac{(\sin^2(x) + x^4)' 2x - (\sin^2(x) + x^4)(2x)'}{(2x)^2} =$$
$$\frac{(2 \sin(x) \cos(x) + 4x^3) 2x - (\sin^2(x) + x^4) 2}{4x^2}$$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]' = 4 \cos x + 3 \sin x$

B.
$$\left[\frac{\sin^2(x) + x^4}{2x} \right]' = \frac{(\sin^2(x) + x^4)' 2x - (\sin^2(x) + x^4)(2x)'}{(2x)^2} =$$
$$\frac{(2 \sin(x) \cos(x) + 4x^3) 2x - (\sin^2(x) + x^4) 2}{4x^2} =$$
$$\frac{4x \sin(x) \cos(x) + 8x^4 - 2 \sin^2(x) - 2x^4}{4x^2}$$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]' = 4 \cos x + 3 \sin x$

B.
$$\left[\frac{\sin^2(x) + x^4}{2x} \right]' = \frac{(\sin^2(x) + x^4)' 2x - (\sin^2(x) + x^4)(2x)'}{(2x)^2} =$$
$$\frac{(2 \sin(x) \cos(x) + 4x^3) 2x - (\sin^2(x) + x^4) 2}{4x^2} =$$
$$\frac{4x \sin(x) \cos(x) + 8x^4 - 2 \sin^2(x) - 2x^4}{4x^2} =$$
$$\frac{1}{x} \sin(x) \cos(x) + 2x^2 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{1}{2} x^2$$

5. PÉLDA

Számítsuk ki a következő deriváltakat!

A. $[4 \sin x - 3 \cos x]' = 4 \cos x + 3 \sin x$

B.
$$\left[\frac{\sin^2(x) + x^4}{2x} \right]' = \frac{(\sin^2(x) + x^4)' 2x - (\sin^2(x) + x^4)(2x)'}{(2x)^2} =$$
$$\frac{(2 \sin(x) \cos(x) + 4x^3) 2x - (\sin^2(x) + x^4) 2}{4x^2} =$$
$$\frac{4x \sin(x) \cos(x) + 8x^4 - 2 \sin^2(x) - 2x^4}{4x^2} =$$
$$\frac{1}{x} \sin(x) \cos(x) + 2x^2 - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{1}{2} x^2$$

C. $[x^2 e^x]' = 2x e^x + x^2 e^x$

6. PÉLDA

Számítsuk ki az $f(x)$ függvények szélsőértékeit a derivált függvények vizsgálatával!

A. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

6. PÉLDA

Számítsuk ki az $f(x)$ függvények szélsőértékeit a derivált függvények vizsgálatával!

A. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$

$$f'(x) = x^2 + x - 6$$

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

7. PÉLDA

Az $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ függvénynek milyen a értéke mellett lesz szélsőértéke az $x = \frac{\pi}{3}$ helyen?

7. PÉLDA

Az $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ függvénynek milyen a értéke mellett lesz szélsőértéke az $x = \frac{\pi}{3}$ helyen?

$$f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$f'(x) = a \cos x + \frac{1}{3} 3 \cos 3x$$

$$0 = a \cos x + \frac{1}{3} 3 \cos 3x$$

$$0 = a \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} 3 \cos 3 \frac{\pi}{3}$$

$$a = 2$$

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

- ▶ Az $F(x)$ függvényt az $f(x)$ függvény primitív függvényének (határozatlan integráljának) nevezzük az (a,b) véges vagy végtelen intervallumban, ha a differenciálhányadosa ezen intervallum minden pontjában $f(x)$. Ha

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$$

akkor

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

- ▶ Az integráljel mögött álló függvény az integrandus.

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

- ▶ Legyen az $f(x)$ függvény valamely primitív függvénye $F(x)$, akkor $F(x) + C$ is primitív függvénye az $f(x)$ -nek, mert konstans deriváltja nulla.

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

- ▶ A határozatlan integrálás, vagy más szavakkal a primitív függvények keresése, bizonyos értelemben a differenciálás megfordítása.
- ▶ nem biztos, hogy létezik zárt alakú primitív függvény

HATÁROZATLAN INTEGRÁL

- ▶ Ha egy (a,b) intervallumban – amely lehet véges vagy végtelen

$$\int f(x)dx = F(x) + C_1 \quad \int g(x)dx = G(x) + C_2,$$

akkor az (a,b) intervallumban a két függvény összege, illetve különbsége is integrálható, és

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = F(x) \pm G(x) + C$$

- ▶ Legyen c tetszőleges szám, akkor

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

ALAPINTEGRÁLOK

$$\begin{aligned}\int k \, dx &= k \cdot x + c & \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) & \int \frac{1}{x} \, dx &= \ln|x| + c \\ \int \sin x \, dx &= -\cos x + c & \int \cos x \, dx &= \sin x + c \\ \int e^x \, dx &= e^x + c & \int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\ln a} + c \\ \int \operatorname{sh} x \, dx &= \operatorname{ch} x + c \quad (\text{magyar}) & \int \sinh x \, dx &= \cosh x + c \quad (\text{nemzetközi}) \\ \int \operatorname{ch} x \, dx &= \operatorname{sh} x + c \quad (\text{magyar}) & \int \cosh x \, dx &= \sinh x + c \quad (\text{nemzetközi}) \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \operatorname{tg} x + c \quad (\text{magyar}) & \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + c \quad (\text{nemzetközi}) \\ \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\operatorname{ctg} x + c \quad (\text{magyar}) & \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x + c \quad (\text{nemzetközi}) \\ \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \operatorname{arctg} x + c \quad (\text{magyar}) & \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x + c \quad (\text{nemzetközi}) \\ \int \frac{1}{1-x^2} \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c \\ \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx &= \operatorname{arsh} x + c \quad (\text{magyar}) & &= \operatorname{arsinh} x + c \quad (\text{nemzetközi}) \\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx &= \operatorname{arch} x + c \quad (\text{magyar}) & &= \operatorname{arcosh} x + c \quad (\text{nemzetközi})\end{aligned}$$

8. PÉLDA

Határozzuk meg a függvények primitív függvényét!

- ▶ $\int x^5 dx$
- ▶ $\int x^{-3} dx$
- ▶ $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx$

8. PÉLDA

$$\triangleright \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

8. PÉLDA

- ▶ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
- ▶ $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

8. PÉLDA

- ▶ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
- ▶ $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
- ▶ $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/2} x^{1/3} dx$

8. PÉLDA

- ▶ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
- ▶ $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
- ▶ $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/2} x^{1/3} dx = \int x^{5/6} dx$

8. PÉLDA

- ▶ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
- ▶ $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
- ▶ $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/2} x^{1/3} dx = \int x^{5/6} dx = \frac{x^{11/6}}{\frac{11}{6}} + C$

8. PÉLDA

- ▶ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
- ▶ $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
- ▶ $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/2} x^{1/3} dx = \int x^{5/6} dx = \frac{x^{11/6}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + C$

8. PÉLDA

- ▶ $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
- ▶ $\int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
- ▶ $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/2} x^{1/3} dx = \int x^{5/6} dx = \frac{x^{11/6}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{11} \sqrt[6]{x^{11}} + C = \frac{6}{11} x \sqrt[6]{x^5} + C$

HATÁROZOTT INTEGRÁL

- ▶ Legyen adott az $y = f(x)$ függvény, amely egy $[a, b]$ zárt intervallumban mindenütt értelmezett. Az $y = f(x)$ függvény a -tól b -ig vett határozott integráljának az alábbi számot nevezzük:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i,$$

ahol Δx_i az $[a, b]$ zárt intervallum i -edik részintervallumának hossza, $f(\eta_i)$ az i -edik részintervallum tetszőleges pontjához tartozó függvényérték.

- ▶ Az összeg határértékét kell képeznünk abban az esetben, amikor az intervallum osztópontjainak a számát úgy növeljük, hogy mindegyik részintervallum hossza nullához tart.

HATÁROZOTT INTEGRÁL

- ▶ Ha a felírt határérték létezik, akkor az $y = f(x)$ függvény az a -tól b -ig terjedő zárt intervallumban integrálható.
- ▶ A határozott integrál a határozatlan integrál ismeretében könnyen kiszámítható, ugyanis a Newton-Leibniz-féle formula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_b^a,$$

ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény bármely primitív függvénye, más szóval határozatlan integrálja, és $[F(x)]_b^a$ azt jelöli, hogy a szögletes zárójelben álló függvények b helyen vett helyettesítési értékéből ki kell vonni az a helyen vett helyettesítési értékét.

HATÁROZOTT INTEGRÁL

- ▶ A határozott integrál kiszámítása tehát a következő részfeladatokból áll:
 1. Az integrandus valamely primitív függvényének a megkeresése.
 2. A felső és alsó határ helyettesítési értéke különbségének a képzése.

HATÁROZOTT INTEGRÁL NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

- ▶ A határok felcserélése esetén a határozott integrál előjelet vált:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

- ▶ Ha az $f(x)$ függvény az $[a,b]$ intervallumban integrálható, és a c pont az $[a,b]$ intervallum belső pontja, akkor az a -tól c -ig, valamint a c -től b -ig számított intergálok összege az a -tól b -ig számított ingergállal egyenlő

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- ▶ Ha egy függvény az $[a,b]$ intervallumban (ahol $a < b$) nemnegatív, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

HATÁROZOTT INTEGRÁL

- ▶ A határozott integrál kiszámításánál alkalmazható tételek:

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

- ▶ Mivel a határozott integrál kiszámításakor először az integrandus primitív függvényét kell meghatároznunk, ezért minden olyan tétel, szabály, módszer alkalmazható, amelyet a határozatlan integrál kiszámításához használtunk.

9. PÉLDA

Számítsuk ki az integrálokat!

▶ $\int_2^4 x^3 dx$

▶ $\int_2^8 \frac{5}{x} dx$

9. PÉLDA

$$\triangleright \int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4$$

9. PÉLDA

$$\triangleright \int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60$$

9. PÉLDA

- ▶ $\int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60$
- ▶ $\int_2^8 \frac{5}{x} dx = [5 \ln |x|]_2^8$

9. PÉLDA

- ▶ $\int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60$
- ▶ $\int_2^8 \frac{5}{x} dx = [5 \ln |x|]_2^8 = 5(\ln 8 - \ln 2)$

9. PÉLDA

Számítsuk ki az integrálokat!

$$\triangleright \int_2^4 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60$$

$$\triangleright \int_2^8 \frac{5}{x} dx = [5 \ln |x|]_2^8 = 5(\ln 8 - \ln 2) = 5 \ln \frac{8}{2} = 5 \ln 4 = 5 \cdot 1,39 = 6,95$$